www.script-onderzoek.nl september2016

Breuken oefenen in de wiskundeles: een goed idee?

Hoe spijker je rekenvaardigheid bij?


Wouter van der Heide


Ruben Hinskens

Inleiding

Elke vo-school mag het rekenonderwijs naar eigen inzicht inrichten. Een school kan er bijvoorbeeld voor kiezen om havoleerlingen in aparte lessen bij te spijkeren. Dat heeft als voordeel dat er gericht gewerkt kan worden aan verbetering van de rekenvaardigheid. Het heeft echter ook een nadeel: rekenen dreigt ‘contextarm’ te worden. Leerlingen zullen het benaderen als een vak dat ze ‘even’ moeten halen, om er daarna voorgoed van verlost te zijn. Het is dan aan de docent om context aan te brengen door rekenvaardigheid te linken met het dagelijks leven en met schoolvakken als wiskunde, natuurkunde, scheikunde en economie.

Een alternatief voor rekenen als apart vak is het integreren van rekenonderwijs binnen een bestaand schoolvak. Wiskunde ligt dan erg voor de hand. Het is een vak waarin leerlingen veel moeten rekenen. Is integreren van rekenen binnen de wiskundeles mogelijk? Dat besloten we te onderzoeken aan de hand van een bijzonder onderwerp: rekenen met breuken. Veel leerlingen, ook op vwo-niveau, maken fouten met het optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen van breuken. Het is een moeilijk onderwerp, omdat het vrij abstract is. Rekenen met breuken laat zich dan ook niet zo gemakkelijk visualiseren*;* het komt vooral aan op begrip. De gedachte achter deze onderwerpkeuze: als blijkt dat rekenen met breuken te integreren valt in het wiskundeonderwijs, dan moet dat met eenvoudigere rekenonderwerpen ook mogelijk zijn.

Het onderzoek

Doel van ons onderzoek was het ontwerpen en testen van wiskundelessen voor havo-4 waarin breuken geïntegreerd zijn. Voor het onderzoek formuleerden we als hoofdvraag: Wat vinden wiskundedocenten van onze aanpak om breuken in het wiskundeonderwijs te integreren ter voorbereiding op de rekentoets?

Hierbij formuleerden we de volgende deelvragen:

Deelvraag 1:	Wat is er al bekend in de literatuur over het integreren van rekenen met breuken binnen wiskunde?
Deelvraag 2:	Wat is de visie van wiskundedocenten op de integratie van het rekenen met breuken binnen de wiskunde?
Deelvraag 3:	Bij welke onderwerpen binnen het vak wiskunde kan het rekenen met breuken nog meer geïntegreerd worden?
Deelvraag 4:	In hoeverre hebben de docenten het idee dat leerlingen beter voorbereid worden op de rekentoets door het ontworpen materiaal?

Literatuuronderzoek: wat verstaan we onder rekenen?
Over rekenen in het algemeen en rekenen met breuken in het bijzonder is de nodige literatuur voorhanden. Het idee om breuken te integreren in het wiskundeonderwijs past bij *realistisch rekenen*, dat volgens Van Zanten (2011) onder meer gebaseerd is op het principe dat *gemathematiseerd wordt vanuit betekenisvolle realiteit*. Dit principe sluit aan bij de visie van

Dekker en Kindt (2006). Zij stellen dat rekenen met breuken niet op zichzelf staat als een los concept, maar moet worden toegepast in de context van een ander wiskundeonderwerp (Dekker & Kindt, 2006). Hier ligt een link met de rekentoets, waarin ook sterk de nadruk ligt op het rekenen in een context. De vragen gaan bijvoorbeeld over het leggen van tapijt of het berekenen van een prijs.

Voor het rekenen met breuken hebben we veel gehad aan Bruin-Muurling (2010). Zij heeft onderzoek gedaan naar de coherentie van het rekenen met breuken tussen het primair en voortgezet onderwijs. In het primair onderwijs wordt leerlingen de basiskennis over breuken bijgebracht. Hierbij wordt vaak gebruikgemaakt van contexten, bijvoorbeeld als volgt: schilder Piet heeft $\frac{5}{8}$ van een schutting geschilderd en schilder Jan $\frac{4}{6}$. Wie is het verst en wat is het verschil? In het voortgezet onderwijs worden de breuken daarentegen abstract aangeboden, dus zonder context. Van leerlingen wordt verwacht dat zij breuken ook zonder context begrijpen. Bruin-Muurling constateert in haar onderzoek echter dat leerlingen in het voortgezet onderwijs niet vaardiger worden in het rekenen met breuken. Ze stelt ook vast dat bijvoorbeeld deling met breuken niet expliciet wordt beschreven in de lesmethodes.

Over het integreren van rekenopgaven met breuken in de wiskundeles hebben we geen literatuur gevonden.

Rekenonderwijs: hoe kan het beter?
Ons onderzoek hebben we uitgevoerd op twee scholen, verder te noemen A en B. Alvorens de door ons ontworpen rekenlessen te testen, hebben we interviews gehouden met vier wiskundedocenten: twee van school A en twee van school B. Het betrof docenten die lesgeven in de bovenbouw en minimaal één havo 4-klas hebben. Met de interviews wilden we achterhalen hoe het rekenonderwijs op de scholen is ingericht, hoe volgens de docenten het rekenonderwijs te verbeteren valt en hoe de docenten denken over het integreren van rekenopgaven in de wiskundeles.

In de aanpak van het rekenonderwijs verschillen de beide scholen nogal. Op school A bleek rekenen in de wiskundeles in bijna elk hoofdstuk terug te komen. Op school B krijgen leerlingen in de onderbouw aparte rekenlessen naast de gewone rekenlessen.

De basis die op de basisschool wordt gelegd, is voldoende volgens de docenten, in elk geval op havo en vwo. Wordt de rekenvaardigheid echter niet onderhouden, dan heb je in de bovenbouw ineens leerlingen die niet meer kunnen rekenen. Meer aandacht voor rekenen in het algemeen is wenselijk. De docenten vinden weliswaar dat het rekenen met breuken onvoldoende wordt herhaald, maar zijn verdeeld over de vraag wiens verantwoordelijkheid dat is. De rol van de wiskundedocent binnen het rekenonderwijs schatten ze vrij klein in. Dat heeft volgens ons vooral te maken met de tijdsdruk en de werkdruk die wiskundedocenten ervaren. Ze staan daarom terughoudend tegenover extra werklast die niet uit de taakomschrijving voortvloeit en waar geen compensatie in tijd of geld tegenover staat. Wiskundedocenten zien ook een belangrijke rol voor docenten van andere vakken, leerlingen en hun ouders, de overheid en uitgevers van schoolmethoden.

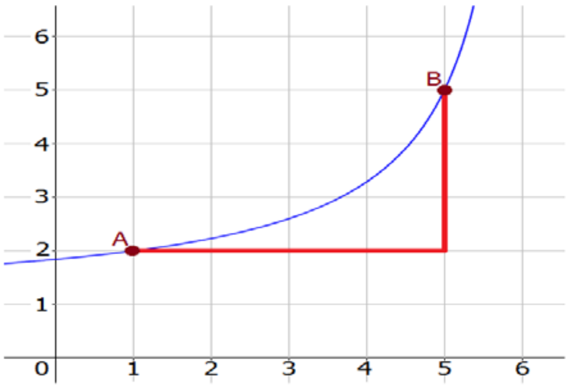
Het integreren van rekenopgaven is een manier om rekenen de aandacht te geven dat het verdient. In het ideale geval worden leerlingen zo vaardiger in het rekenen met breuken zonder dat dit ten koste gaat van de reguliere wiskundestof. Het is wel belangrijk dat de docent regelmatig evalueert om vast te stellen of de aanpak effectief is. Tijdgebrek zien de docenten als een obstakel, omdat het wiskundeprogramma al overladen is. Het rekenen mag niet ten koste gaan van de lesdoelen van de reguliere lessen. Vooral bij zwakkere leerlingen bestaat het gevaar dat ze blijven steken bij het rekenen en daardoor niet meer aan de wiskunde toekomen.

Onderwerpkeuze
Zowel op school A en school B wordt de wiskundemethode *Getal & Ruimte* gebruikt. Bij het kiezen van wiskundeontwerpen die zich lenen voor het integreren van breuken, hebben we echter ook twee andere veelgebruikte methodes bekeken, nl. *Moderne Wiskunde* en *Math4All*. We wilden namelijk lessen ontwerpen die in principe bij elke methode toegepast zouden kunnen worden. In overleg met de verantwoordelijke docenten en de stagedocent kozen we de volgende onderwerpen:

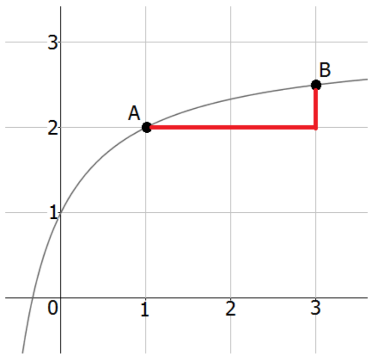
- recht- en omgekeerd evenredigheid (voor wiskunde A);
- formules met twee variabelen (voor wiskunde A);
- complementregel bij kansen (voor wiskunde B);
- exponenten en logaritmen (voor wiskunde B).

Twee voorbeeldopgaven illustreren hoe rekenen met breuken verwerkt kan worden in de gewone lesstof. Hierbij geven we aan hoe je als docent de opgaven zou kunnen behandelen.

Opgave 1
Zonder breuken
Beschouw de figuur hieronder. Bereken de gemiddelde toename op het interval [1,5].
Gemiddelde toename $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4} = 0{,}75$



Met breuken
Beschouw de figuur hieronder. Bereken de gemiddelde toename op het interval [1,3].



Gemiddelde toename $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\frac{1}{2}-2}{3-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

De behandeling van een opgave met breuken begint hetzelfde als die van een opgave zonder breuken. Bij deze opgave leg je dus eerst uit wat het begrip gemiddelde toename inhoudt en welke formule daarbij hoort. Zodra een opgave met breuken op het bord staat, bijvoorbeeld $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\frac{1}{2}-2}{3-1}$, kan je die stap voor stap doorlopen. Eerst moet $2\frac{1}{2} - 2$ uitgerekend worden. Je vraagt leerlingen wat het antwoord is en hoe ze daaraan komen. Schrijf verschillende oplossingsmanieren stap voor stap op het bord, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}-2=\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$. Komt een leerling met een verkeerde oplossing, dan maak je met een getallenvoorbeeld duidelijk waarom zijn strategie niet klopt.

Het kan helpen om een lijst met rekenregels te maken, bijvoorbeeld op de achterkant van het bord. Leerlingen nemen die over in hun schrift. Bij een som als $\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ kunnen ze dan de juiste regel zoeken. Wanneer de leerlingen meerdere opgaven hebben geoefend, zullen ze de lijst al snel niet meer nodig hebben. Het blijft echter een handig hulpmiddel. Tijdens een uitleg kan je de lijst bijvoorbeeld gebruiken om het geheugen van je leerlingen op te frissen.

Vraag de leerlingen om alle rekenstappen uit te schrijven, zoals voorgedaan is op het bord. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\frac{1}{2}-2}{3-1}=\frac{1}{4}$ gaat dus te snel. Spreek de leerlingen hierop aan wanneer ze zelfstandig werken. Stap voor stap opschrijven verkleint de kans op fouten en maakt het ook gemakkelijker om fouten te corrigeren.

Opgave 2 Weerbericht
Zonder breuken

Voor een weekend is een weersvoorspelling gedaan. Op zaterdag is de kans dat het gaat regenen $0{,}351$. Op zondag is de kans dat het gaat regenen $0{,}245$. Bereken de kans dat er op allebei de dagen geen regen valt.

$$P(\text{za geen regen})=1-0{,}351=0{,}649$$
$$P(\text{zo geen regen})=1-0{,}245=0{,}755$$
$$P(\text{weekend geen regen})=0{,}649\cdot0{,}755\approx0{,}490$$

Met breuken
Voor een weekend is een weersvoorspelling gedaan. Op zaterdag is de kans dat het gaat regenen $\frac{1}{3}$. Op zondag is de kans dat het gaat regenen $\frac{1}{4}$. Bereken exact de kans dat er op allebei de dagen geen regen valt.

$$P(\text{za geen regen})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P(\text{zo geen regen})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$P(\text{weekend geen regen})=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Deze opgave is een mooie gelegenheid om het begrip van breuken te testen. Sommige leerlingen zullen vasthouden aan de regels, bijvoorbeeld $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$. Anderen 'zien' gelijk het antwoord, wat een teken is dat ze breuken meer als gewone getallen behandelen en niet alleen procedures volgen. De beloning daarvoor is dat ze opgaven sneller kunnen oplossen. Op het bord kan je eventuele tussenstappen een andere kleur geven, om aan te geven dat ze niet opgeschreven hoeven te worden als de leerling ze niet nodig heeft.

De laatste berekening $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ kan sneller worden uitgevoerd door de 3 'weg te strepen': $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Behandel in de uitleg echter eerst de standaardmethode, omdat de meeste leerlingen de opgave hiermee zullen aanpakken. Bovendien vinden sommige leerlingen het fijn om één methode te hebben die altijd werkt. Het hoofddoel is dat je alle leerlingen de standaardmethode aanleert. Daarna zal een slimme leerling vaak wel opmerken dat er een snellere manier is. Dat is een mooie aanleiding voor een discussie over de vraag waarom die manier werkt. Zulke discussies helpen om meer inzicht in breuken te krijgen. Het is echter niet noodzakelijk dat alle leerlingen de andere aanpak ook beheersen, want voor een aantal van hen blijft de standaardmethode geschikter en gemakkelijker.

Bij opgaven met kansen moet het antwoord altijd tussen 0 en 1 liggen. De leerling kan een antwoord alleen controleren als hij weet dat een breuk kleiner is dan 1. Ook dat is een vorm van inzicht waar je klassikaal aandacht aan kan besteden, bijvoorbeeld wanneer veel leerlingen bij het oplossen van de dezelfde fout maken.

Lesontwerp: het primaire én het secundaire lesdoel halen
De ontworpen lessen hebben dezelfde opzet: klassikale uitleg (docent gestuurd), gevolgd door zelfstandig werken (gedeelde sturing). De docent kiest de opgaven waaraan de leerlingen zullen werken, terwijl de leerlingen kiezen op welke wijze ze dat gaan doen. Wie wil, kan in zijn eentje de opgaven maken, maar samenwerken met anderen mag ook. De docent moet er hierbij wel op toezien dat de rekenmachines niet tevoorschijn worden gehaald, want het is juist de bedoeling dat de leerlingen zelf rekenen. Ook moet de docent regelmatig schriften controleren om de leerlingen gerichte feedback te kunnen geven. Op deze manier kunnen de leerling zich blijven ontwikkelen in de nieuwe aangeboden lesstof (primair leerdoel) en toch de rekenvaardigheid (secundair leerdoel) trainen.

Voor elke les geldt dat rekenen met breuken een secundair leerdoel is. Daarom hebben we de breukenalgebra vooral toegevoegd in de voorbeelden van de verdiepende stof.

Evaluatie
We hebben één les gegeven op school A en drie lessen op school B. Elke les is geobserveerd door onze stagedocent en de wiskundedocent van de betrokken klas. Bij alle lessen gold dat het secundaire lesdoel wel gehaald werd. De docenten waren blij dat leerlingen actief met breuken bezig waren. Opvallend was dat leerlingen meer vertrouwen kregen in hun rekenvaardigheid. Ze bleken ook zonder rekenmachine te kunnen rekenen en dat hadden ze zich eigenlijk nooit zo gerealiseerd.

Tussen de lessen Wiskunde A en Wiskunde B zagen we een duidelijk verschil. De lessen Wiskunde B werden niet veel moeilijker door de breuken. Zodra de leerlingen hun kennis van de rekenregels hadden opgefrist, kostte het rekenen nauwelijks extra tijd. Bij Wiskunde A vormden de breuken echter wel een drempel. Dat ging soms zover dat er te veel tijd besteed werd aan het secundaire lesdoel, waardoor het primaire leerdoel in de verdrukking kwam.

De lessen maakten ons ook wijzer over de onderwerpkeuze. In principe kan rekenen met breuken met elk wiskundig onderwerp worden gecombineerd. Het is aan de docent om te beoordelen of alle lesdoelen dan nog gehaald kunnen worden. De in onze lessen gekozen onderwerpen bleken geschikt. Minder geschikt zijn onderwerpen waar een instructie met rekenmachine aan te pas komt, zoals het plotten van grafieken. Wanneer leerlingen een rekenmachine bij de hand hebben, gebruiken ze die liever, omdat ze dan niet zelf hoeven na te denken over breuken en rekenen. Daar komt bij dat het combineren van uitvoering (welke knoppen op de rekenmachine moet ik indrukken?) met meer abstracte stof (hoe vermenigvuldig ik twee breuken?) minder goed werkt: het is te veel voor één les. Herhaling van een bekend onderwerp bleek wél uitstekend te combineren met rekenen met breuken. Wanneer leerlingen al wat vertrouwder zijn met de primaire stof, kunnen ze de uitleg over rekenregels gemakkelijker opnemen.

Integreren van breuken wordt lastiger het als er in de les een volledig nieuw wiskundeonderwerp geïntroduceerd wordt. Dat bleek bij een les waarvan het primaire lesdoel het introduceren en uitleggen van de complementregel was. De aandacht voor het rekenen met breuken ging ten koste van het begrip van de complementregel. Het secundaire lesdoel, aandacht besteden aan breuken, werd gehaald, maar er waren vervolglessen nodig om de complementregel helemaal duidelijk te maken. In onze ogen werkt het toevoegen van breuken vertragend op het begrijpen van de reguliere stof. Herhalingslessen lenen zich in die zin beter voor extra aandacht voor breuken.

Verder hebben we didactisch gezien ook bijgeleerd. Leerlingen zien veel liever getallen dan letters. Rekenregels voor breuken zijn al abstract en niet iedereen kan zich daar iets bij voorstellen, dus dan geven getallen houvast. Daarom beginnen we een les liever met een voorbeeld als $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$ in plaats van de regel $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$.

Hoofdvraag:
Werkt de onderzochte aanpak?

Hoofdvraag: Wat vinden wiskundedocenten van onze aanpak om breuken in het wiskundeonderwijs te integreren ter voorbereiding op de rekentoets?

Al met al is het integreren van rekenopgaven met breuken in de wiskundeles een interessante optie die het overwegen waard is. Meer aandacht voor rekenen is hard nodig en op deze manier oefenen leerlingen vaker en daardoor worden ze vaardiger en krijgen meer zelfvertrouwen. Dat helpt ze niet alleen om de rekentoets te halen, maar ook bij alle andere vakken en situaties in het dagelijks leven waarbij ze moeten rekenen.

Docenten vinden het wel belangrijk regelmatig te evalueren als je kiest voor deze methode. Het toevoegen van extra lesstof en dus extra lesdoelen kan verkeerd uitpakken. Vooral zwakkere leerlingen blijven dan steken bij het rekenen en komen niet meer toe aan de reguliere lesstof. De docent kan bijvoorbeeld evalueren door leerlingen te observeren en te toetsen en door met collega's over de les te praten. Daarnaast wordt een flexibele aanpak van de wiskundedocent gevraagd. Lukt het niet om alle stof in de les te behandelen of blijkt uit vragen van leerlingen dat ze de stof niet hebben begrepen, dan zijn dat signalen dat er iets moet veranderen. De docent kan dan besluiten om de lesstof op te splitsen, meer of minder voorbeelden te geven of de extra rekenopgaven helemaal weg te laten. Als dat nodig is, is de flexibele docent steeds bereid om de les aan te passen en van het oorspronkelijke plan af te wijken. Onder deze voorwaarden – regelmatig evalueren en een flexibele aanpak – vinden de door ons geïnterviewde docenten het integreren van rekenen met breuken in de wiskundeles een goede voorbereiding op de rekentoets.

Hoe verder met rekenen in de havo-bovenbouw?

Uit ons onderzoek concluderen we dat het integreren van breuken in de wiskundeles mogelijk is. En omdat rekenen met breuken een moeilijk rekenonderwerp is, concluderen we dat het integreren van eenvoudigere rekenonderwerpen ook haalbaar is. Overigens wil dat niet zeggen dat het rekenvaardigheidstraining in elke wiskundeles als secundair lesdoel kan worden meegenomen. Het te behandelen nieuwe wiskundeonderwerp mag niet te moeilijk zijn. Een les waarin een bekend wiskundeonderwerp wordt herhaald, leent zich ook heel goed voor integratie van rekenvaardigheidstraining. Vanzelfsprekend zijn dit voorlopige conclusies. Meer onderzoek is aan te bevelen, want ons onderzoek was kleinschalig van opzet.

Integreren van rekenvaardigheid in de wiskundeles vraagt een extra inspanning van de wiskundedocent. Het omzetten van opgaven naar sommen met breuken of het maken van opgaven en deze vervolgens integreren van opgaven zal de wiskundedocent zelf moeten doen. De populairste wiskundemethodes zijn namelijk nog niet afgestemd op het bijspijkeren van rekenvaardigheid. Hoe kan de docent dat aanpakken? De ideale aanpak zou volgens ons zijn dat de wiskundesectie bespreekt hoe rekenen systematisch in de wiskundelessen geïntegreerd kan worden.

Als eerstegraads wiskundedocenten zijn wij vooral geïnteresseerd in het integreren van rekenen bij het vak wiskunde. Wiskunde is natuurlijk niet het enige vak waarin rekenvaardigheid van pas komt. Ook in vakken als economie en natuurkunde moet het nodige worden gerekend. Wij denken echter dat deze vakken zich minder lenen voor het integreren van rekenopgaven, omdat hierin vooral het overbrengen van concepten centraal staat.

Waar de geïnterviewde docenten het over eens zijn, is dat rekenen een basisvaardigheid is die leerlingen moeten beheersen. Vergelijkbaar met een vaardigheid als spelling. Een van de stagebegeleiders zei: "Geef ze maar extra rekenlessen. Als de school het regelt, dan leren ze het wel." Dit voert ons terug naar de discussie over de verplichte rekentoets, die de aanleiding voor ons onderzoek was. Voordat we aan het onderzoek begonnen, waren wij tegen de rekentoets. Een onvoldoende op de rekentoets zou er immers toe kunnen leiden dat een leerling zijn diploma niet haalt, terwijl de toets niet helpt bij de ontwikkeling van zijn rekenvaardigheid. Erger nog: een leerling wordt afgerekend op een vaardigheid waarin hij niet (voldoende) is onderwezen.

Inmiddels zijn we iets anders over de kwestie gaan denken. De lessen die we gaven, leerden ons dat leerlingen in havo-4 serieuze rekenproblemen hebben. We gingen ons afvragen of de verplichte rekentoets kan bijdragen aan het verbeteren van hun rekenvaardigheid. Misschien zou de rekentoets voor leerlingen een stimulans kunnen zijn om met rekenen aan de slag te gaan?

Onze mening werd verder beïnvloed door gesprekken met de wiskundedocenten op de stagescholen. Den Haag zet scholen onder druk met de rekentoets: beste scholen, hier is de rekentoets, die moeten leerlingen halen en zoekt u zelf maar uit hoe u het rekenonderwijs organiseert. Dat vinden wij geen doordachte aanpak. Wij willen ervoor pleiten dat eerst de filosofie achter het rekenonderwijs wordt geformuleerd. Wat moeten leerlingen kunnen en kennen als ze het voortgezet onderwijs verlaten? Waarom is dat voor hen belangrijk? Zijn deze vragen beantwoord, dan kan een kennisbasis worden samengesteld. Pas dan komt de vraag aan de orde hoe het rekenonderwijs en de daarbij aansluitende toetsing vorm kunnen worden gegeven.

Literatuur/referenties

Bruin-Muurling, G. G. (2010). *The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum.* Proefschrift, Technische Universiteit Eindhoven.

Dekker, T., & Kindt, M. (2006). *Wat doen we (niet) met breuken?, Nieuwe Wiskrant,* 26(2), 6-10.

Van Zanten, M. (2011). *Uitgangspunten reken-wiskundeonderwijs*, verkregen op 11 november 2015 van http://paborekenen.nl/artikelen/algemeen/uitgangspunten-rekenen-wiskunde.html